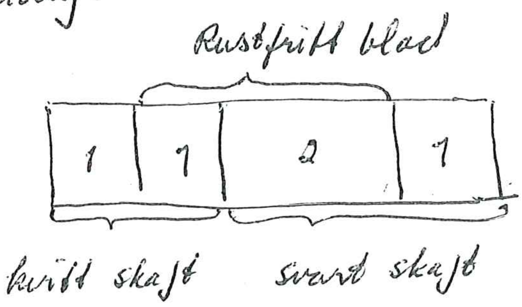
2.6 Betinga sannsyn

Tilleggsinformasjon kan påverke sannsyn

- Sjuk – kjønnsavhengig, aldersavhengig
- Synspunkt – partiavhengig

Eksempel. Knivskuff med 5 knivar. Trekkjer kniv tilfeldig.



A ~ trekkjer kniv med rustfritt blad

B ~ trekkjer kniv med svart skaft.

$$P(A) = \frac{n_A}{5} = \left(\frac{g_A}{n}\right) = \frac{3}{5} \qquad P(B) = \frac{n_B}{5} = \left(\frac{g_B}{n}\right) = \frac{3}{5}$$

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{n_{A\cap B}}{5}}{\frac{n_B}{5}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

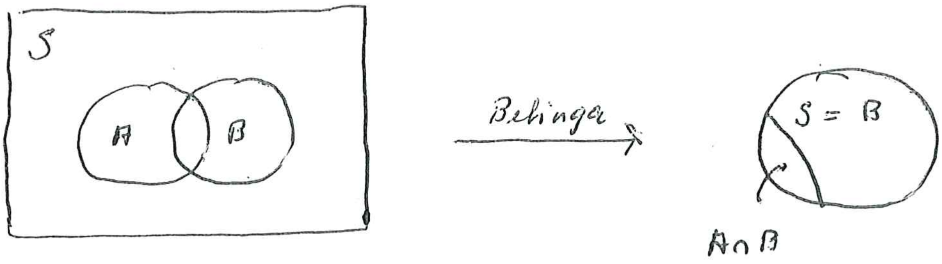
Definisjon 2.10

La A og B vere hendingar i S. $P(B) > 0$

Betinga sannsyn for A gitt B er definert som

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Tilsvarande er $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ om $P(A) > 0$



Eks. Addisjonssetninga for betinge sannsyn.

$$P(A \cup B \mid C) = \frac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)}, \qquad (A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$$

$$= \frac{P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)}{P(C)}$$

$$= P(A\mid C) + P(B\mid C) - P(A\cap B\mid C)$$

Eks. Familie med 2 born

$S = \{GG, GJ, JG, JJ\}$

A = Begge borna er gutar

B = Minst eit av borna er gut.

$$P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(GG)}{P(GG, GJ, JG)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Multiplikasjonssetninga

Frå definisjonen av betinga sannsyn får vi:

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

og vidare

$P(A \cap B \cap C) = P(C | A \cap B) \cdot P(A \cap B) = P(C | A \cap B) \cdot P(B|A) \cdot P(A)$

Generelt får vi Teorem 2.12

La $A_1, A_2, \ldots, A_k$ vere hendingar i eit ~~eksperiment~~ utfallsrom

Då er $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_k | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \, P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})$

$= P(A_k | A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \cdot P(A_{k-1} | A_1 \cap \cdots \cap A_{k-2}) \cdot P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-2})$

$= P(A_k | A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \cdot P(A_{k-1} | A_1 \cap \cdots \cap A_{k-2}) \cdot \ldots \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$

Eks. Trekkjer 4 kort frå kortstokk.

$A_1 \sim$ 1. er ruter knekt.	$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$
$A_2 \sim$ 2. er spar knekt.	$P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$
$A_3 \sim$ 3. er ruter 10	$= \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{51} \cdot \frac{1}{52}.$
$A_4 \sim$ 4. er hjerter knekt.	

Definisjon 2.11

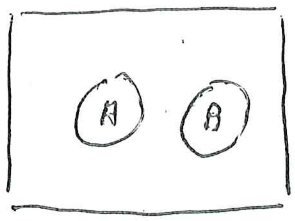
To hendingar A og B er uavhengige dersom og berre dersom $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

NB. ~~Dersom~~ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A|B) = P(B|A)$.

Spesielt om $A_1, A_2, \ldots A_k$ er uavh. har vi at

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_k)$

Er disjunkte hendingar uavhengige



$A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$

$\Rightarrow$ A og B uavhengige berre dersom minst ei av hendingane A og B har sannsyn 0.

Eks. A og B uavhengige $\Rightarrow$ A' og B' uavhengige

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = \underbrace{1 - P(A)}_{P(A')} - P(B)\underbrace{(1 - P(A))}_{P(A')}$$

$$= P(A')(1 - P(B)) = P(A') \cdot P(B')$$

Tilsvarande $A' \cap B$ og $A \cap B'$.

<u>Chevalier de Mere</u>

$P(A \text{ vinn}) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B \text{ vinn}) = \frac{1}{2}$. Den 1 til 6 sigrar vinn potten. Avbrote når A har vunne 5 og B har vunne 3.

$P(B$ når først til 6 sigrar$) = P(B$ vinn 3 spel på rad$)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$P(A$ når først til 6 sigrar$) = \cancel{1 - P(B)}\; 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

A får 7/8 og B får 1/8.

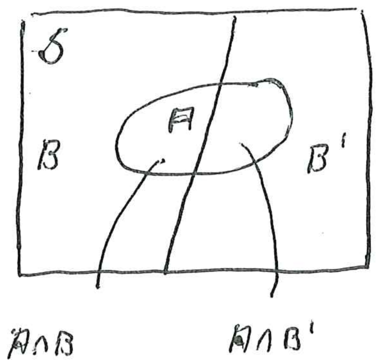
Definisjon 2.12

Ei samling hendingar $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ er ~~gjensidig~~ uavhengige dersom for alle undermengder $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}$, $k \le n$ har at

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{ik})$$

Total sannsyn. Oppdeling av utfallsrommet.

Strategi for å finne sannsyn for hendingar



$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

$$P(A) = P(A \cap B) + \cancel{P(A^{*} \cap B)}\ P(A \cap B')$$

$$= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B') \cdot P(B')$$

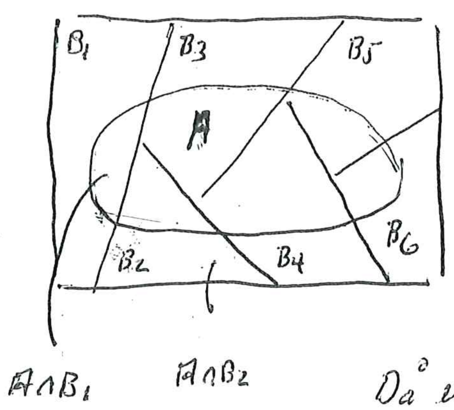
Generelt

Teorem 2.12 La $B_1, B_2, \ldots, B_n$ vere ei mengde hendingar i S slik at

$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$ og $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$,

$P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$

La A vere ei hending i S



Då er $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$

$$= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)\, P(B_n)$$

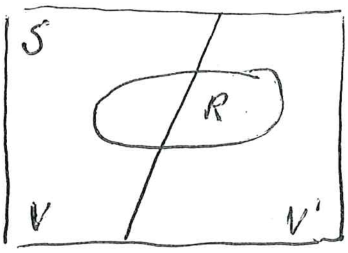
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\, P(B_i)$$

Eks: Multippel choice med m svaralternativ.

På ei bestemt oppgåve veit studenten svaret eller hen gjettar. La p vere sannsynet for at studenten veit svaret. (1−p) er då sannsynet for at studenten gjettar. Gå ut i frå at dersom studenten gjettar har hen sannsyn 1/m for å gjette rett.

La R vere hendinga at studenten har rett svar

La V —"— — at studenten veit svaret.



$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \cap V) + P(R \cap V') \\ &= P(R|V)\cdot P(V) + P(R|V')P(V') \\ &= 1 \cdot p + \frac{1}{m}(1-p) \end{aligned}$$

Størst P(R) dersom m er liten.

$$P(V|R) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|V)\cdot P(V)}{P(R \cap V) + P(R \cap V')}$$

$$= \frac{p}{p + \frac{1}{m}(1-p)}$$

Størst P(V|R) når m er stor.

Dette er eit eksempel på bruk av Bayes Teorem
(Finne sannsynet for ein hending i partisjon gitt at ei hending med sannsyn større enn 0 har skjedd.

Bayes Teorem 2.14

La $B_1, B_2, \ldots, B_n$ vere ein partisjon av S
$\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S, \quad B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j.\ P(B_i) > 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \right)$

La A vere ei hending i S slik at $P(A) > 0$.

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)\, P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Multippel choice

	$P(R)$	$P(V \mid R)$
$m=2,\ p=\frac{1}{2}$	0.75	2/3
$m=5,\ p=\frac{1}{2}$	0.6	5/6
$m=10,\ p=\frac{1}{2}$	0.55	10/11